Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Übungsblatt 7

Wenn man eine quadratische Matrix als eine Abbildung auffasst, dann kann man die Frage stellen, welche Vektoren sich unter dieser Abbildung am wenigstens verändern. Wenn sie dieselbe Richtung behalten, dann heißen sie Eigenvektoren. Anders ausgedrückt, ein nicht-trivialer Vektor $\boldsymbol{v}$ ist ein Eigenvektor einer Matrix A, falls ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (benannt Eigenwert) existiert, so dass $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Man berechnet zuerst alle Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ und bestimmt dann die zugehörigen Eigenvektoren.

Eine Abbildung, unter der alle Längen gleich bleiben, heißt Isometrie. Die linearen Isometrien haben genau die orthogonalen Matrizen als Darstellungsmatrizen. Man erkennt diese Matrizen daran, dass ihre Spalten eine Orthonormalbasis bilden.

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben sind nicht abzugeben und werden am 21. Juni in den Übungen besprochen.

1. Gegeben sei eine Permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Bestimmen Sie die zugehörige „Permutationsmatrix“ $P_\pi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist die i-te Zeile von $P_\pi A$ die $\pi(i)$-Zeile von A für alle $i = 1, \dots, n$.

2. Zeigen Sie, dass jede Permutationsmatrix orthogonal ist.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 25. Juni 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -7 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -10 & 3 \\ 4 & 1 & 11 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Es seien die Vektoren

$$\boldsymbol{g}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{g}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{g}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und die Matrix } A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(in der Standardbasis) gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{G} := (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Berechnen Sie die Darstellung vom Vektor $\boldsymbol{v}$ und der Matrix A in der Basis $\underline{G}$.

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie ihre (reellen) Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, welcher Diagonalmatrix ist sie ähnlich?

4. Die LU-Zerlegung aus dem letzten Blatt funktioniert nicht für alle Matrizen und ist weiterhin numerisch instabil. Man kann das Verfahren mit „Pivot-Suche“ verbessern. In k-tem Schritt vertauscht man zuerst die Zeilen von $A^{(k)}$, so dass auf der Diagonale die (nach Betrag) größte Zahl steht. Explizit: Man bestimmt $j(k) \in \{k, k+1, \ldots, n\}$, so dass

$$a^{(k)}_{j(k),k} = \max_{i \in \{k, k+1, \ldots, n\}} a^{(k)}_{i,k}.$$

Dann vertauscht man die k-te und $j(k)$-te Zeile, d. h. man multipliziert $A^{(k)}$ mit der geeigneten Permutationsmatrix $P^{(k)}$, und erst dann berechnet man $L^{(k)}$. Also bekommt man $A^{(k+1)}$ als

$$A^{(k+1)} = L^{(k)} P^{(k)} A^{(k)}.$$

Führen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

dieses Verfahren mit (dieses Blatt) und ohne (das letzte Blatt) Pivotsuche durch, d. h. bestimmen Sie jeweils alle $A^{(k)}$, $L^{(k)}$ und (mit Pivotsuche) $P^{(k)}$.